Exercice B : Circuit LC (/5)

I. Le condensateur

1. L'interrupteur K' permet de décharger le condensateur en court-circuitant ce dernier (K est alors ouvert).
L'interrupteur K permet de fermer le circuit pour assurer la charge du condensateur C (K' est alors ouvert).

2. L'interrupteur K' doit être ouvert, sinon le générateur est court-circuité (un inverseur permet d'éviter ce risque).

3. Soit q la charge de l'armature A du condensateur.

$I_0 = \frac{dq}{dt}$ d'où par intégration : $q = I_0.t + \text{cste}$. A t = 0, le condensateur est déchargé, donc la constante d'intégration est nulle.

$u = \frac{q}{C}$ d'où en remplaçant : $\boxed{u = \frac{I_0.t}{C}}$

4. Notons a ce coefficient directeur : $a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{6,4-0}{300-0} = 2,1.10^{-2}\,V.s^{-1}$

$a = \frac{I_0}{C}$ d'où $C = \frac{I_0}{a} = 1,2.10^{-3}\,F$

II. La bobine

1. On visualise la tension u_{AM} (aux bornes du générateur) sur la voie Y_1 et la tension u_{BM} (aux bornes de la résistance) sur la voie 2.

2. $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$ (loi d'additivité des tensions)

d'où $\boxed{u_{AM} = L.\frac{di}{dt} + R.i}$

3.

a. $(u_{BM})_{t=0} = 0V$ (point M_2 de la voie Y_2) or $u_{BM} = R.i$ d'où i = 0A à cet instant.

Point M_1 : $(u_{AM})_{t=0}$ = 2,5 x 2 = 5,0V

D'où comme i est nulle : $\boxed{(u_{AM})_{t=0} = L.\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 5,0V}$ d'après **2.**

b. La tangente à la courbe Y_2 en M_2 a pour coefficient directeur : $\left(\frac{du_{BM}}{dt}\right)_{t=0} = \frac{4,0}{5,0.10^{-3}} = 800V.s^{-1}$.

Or $\frac{du_{BM}}{dt} = \frac{d(R.i)}{dt} = R\frac{di}{dt}$ d'où $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{R}\left(\frac{du_{BM}}{dt}\right)_{t=0} = \frac{800}{10} = 80A.s^{-1}$

En remplaçant dans **3.a** : $L = \frac{(u_{AM})_{t=0}}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}} = \frac{5}{80} = 6,2.10^{-2}\,H = 62mH$

III. Oscillations dans un circuit idéal

1. Équation différentielle régissant l'évolution de la charge au cours du temps

a. $\boxed{u_C = \frac{q}{C}}$ et $u_L = L.\frac{di}{dt}$ or $i = \frac{dq}{dt}$ d'où $\boxed{u_L = L.\frac{d^2q}{dt^2}}$

b. $u_c + u_L = 0V$ d'après la loi d'additivité des tensions (tension aux bornes d'un fil).

D'où : $\boxed{\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0}$

2. Évolution de la charge du condensateur

a. $\frac{dq}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}.Q_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}}.Q_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

En remplaçant dans **1.b** : $\frac{Q_m}{C}.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) - \frac{4\pi^2 L}{T_0^{\,2}}.Q_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) = 0$

d'où : $Q_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right).\left[\frac{1}{C} - \frac{4\pi^2 L}{T_0^{\,2}}\right] = 0$ d'où nécessairement $\frac{1}{C} - \frac{4\pi^2 L}{T_0^{\,2}} = 0$ d'où $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}}$

A.N. : $T_0 = 2.\pi\sqrt{62.10^{-3}.1,2.10^{-3}} = 0,054s = 54ms$

b. Q_m est la charge initiale du condensateur : $Q_m = C.U_0 = 1,2.10^{-3}.10 = 1,2.10^{-2}C$