30 page 258

a. La durée du voyage entre la Terre et alpha du centaure mesurée dans le référentiel terrestre n'est pas une durée propre : le départ et l'arrivée ne se produisent pas au même endroit dans ce référentiel. Cette durée est notée Δt_m.

$\Delta t_m = \frac{D}{v}$ avec D : distance entre la Terre et alpha du centaure et v la vitesse du vaisseau.

b. La durée propre Δt_p est celle mesurée par un passager du vaisseau : les deux événements, départ et arrivée, s'y produisent au même endroit dans le référentiel du vaisseau. Elle est plus courte que Δt_m.

D'après l'énoncé : $\Delta t_p = 10$ans

La relation de dilatation des durées donne : $\Delta t_m = \gamma.\Delta t_p$ soit : $\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ soit : $\Delta t_p = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times \Delta t_m$

c. En remplaçant Δt_m par : $\Delta t_m = \frac{D}{v}$ on obtient : $\Delta t_p = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times \frac{D}{v}$ où la seule inconnue est v qu'il reste à isoler :

$$\Delta t_p^{\,2} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\times\frac{D^2}{v^2} \Leftrightarrow \Delta t_p^{\,2}.v^2 = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).D^2 = D^2 - \frac{v^2}{c^2}D^2 \Leftrightarrow v^2\left(\Delta t_p^{\,2} + \frac{D^2}{c^2}\right) = D^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{D^2}{\Delta t_p^{\,2} + \frac{D^2}{c^2}}$$

$$\boxed{v = \frac{D}{\sqrt{\Delta t_p^{\,2} + \frac{D^2}{c^2}}}} = \frac{4,5\times 9,46.10^{15}}{\sqrt{(10\times 365,25\times 24\times 3600)^2 + \left(\frac{4,5\times 9,46.10^{15}}{3,00.10^{8}}\right)^2}} = \underline{1,2.10^{8}\,\text{m.s}^{-1}}$$

attention aux unités : c en $m.s^{-1}$ donc il faut exprimer D en m et Δt_p en s :

- $D = 4,5$a.l. $= 4,5\times 9,46.10^{15}$m
- $\Delta t_p = 10$ans $= 10\times 365,25\times 24\times 3600$s

Rappel :

L'année de lumière (a.l.) est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année.

$$c = \frac{\text{distance parcourue par la lumière}}{\text{durée du parcours}} = \frac{d}{\Delta t} \quad \text{d'où :} \quad d = c\times\Delta t$$

$$1\ \text{a.}\ell. = 3,00.10^{8} \times \underbrace{365,25\times 24\times 3600}_{\text{1 année en secondes}} = \underline{9,46.10^{15}\ \text{m}}$$