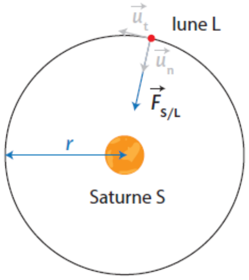
20 Les lunes de Saturne

1.a. et **b.** Voir schéma ci-dessous.



c. $\vec{F}_{S/L} = G \times \dfrac{m \times M_S}{r^2} \vec{u}_n$.

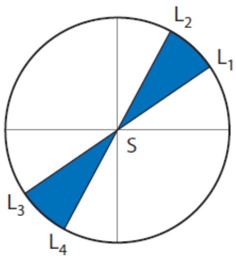
2. Dans le référentiel saturnocentrique, la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse de la lune donne : $\vec{F}_{S/L} = m\,\vec{a}$.

Or $\vec{F}_{S/L} = G \times \dfrac{m \times M_S}{r^2} \vec{u}_n$, d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_S}{r^2} \vec{u}_n$.

3.a. On a donc $\vec{a} \begin{cases} a_n = G \times \dfrac{M_S}{r^2} \\ a_t = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$.

La coordonnée tangentielle de l'accélération $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ est nulle, donc la valeur de la vitesse de la lune est constante : le mouvement est uniforme dans ce référentiel.

b. D'après la deuxième loi de Kepler, le segment de droite SL, reliant les centres de Saturne et de sa lune, balaie des aires égales pendant des durées égales.
Lorsque la trajectoire est circulaire, les distances parcourues (L_1, L_2) et (L_3, L_4) pendant une même durée sont égales.



4. La coordonnée normale de $\vec{a}$ est :

$a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

Par identification, $G \times \dfrac{M_S}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$ d'où $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre de masse de la lune est tangen à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement et sa valeu est $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

5.a. La période de révolution de la lune est égale à la durée mis par ce satellite pour faire un tour complet de Saturne à la vitess de valeur v suivant une trajectoire circulaire : $T = \dfrac{2\pi \times r}{v}$.

Il vient $T = 2\pi \times r \times \sqrt{\dfrac{r}{G \times M_S}}$.

La période de révolution de cette lune s'exprime par :

$T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{r^3}{G \times M_S}}$.

b. On isole M_S : $T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{r^3}{G \times M_S}$; donc $M_S = \dfrac{4\pi^2}{G \times T^2} \times r^3$

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times \left(2{,}29 \times 10^{10}\,\text{m}\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \times \left(3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7\ \text{s}\right)^2}.$$

La masse de Saturne est $5{,}69 \times 10^{26}$ kg.

6. Si Métis est une lune de Saturne on a : $\dfrac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}} = \dfrac{T^2_L}{r^3_L}$.

On calcule $\dfrac{T^2_L}{r^3_L}$ et $\dfrac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}}$.

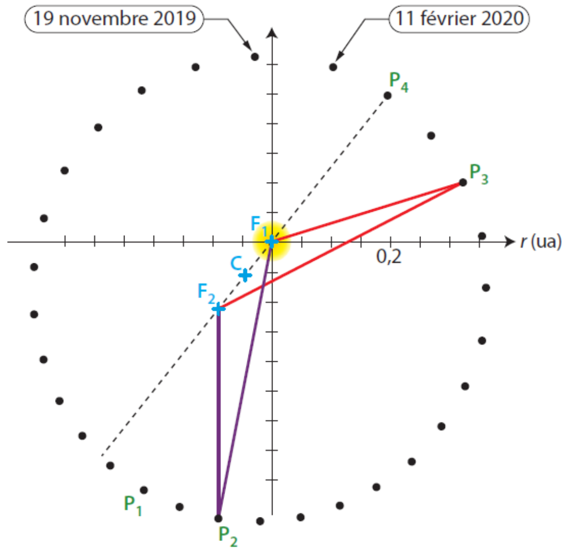
$$\frac{T^2_L}{r^3_L} = \frac{\left(3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7\ \text{s}\right)^2}{\left(2{,}29 \times 10^{10}\,\text{m}\right)^3} = 1{,}04 \times 10^{-15}\,\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\frac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}} = \frac{\left(0{,}295 \times 24 \times 3600\ \text{s}\right)^2}{\left(1{,}28 \times 10^8\,\text{m}\right)^3} = 3{,}10 \times 10^{-16}\,\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

$\dfrac{T^2_L}{r^3_L} \neq \dfrac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}}$ donc Métis n'est pas une lune de Saturne.

Préparation à l'ECE

Partie I



Le Soleil est positionné en F_1, un des foyers du grand axe $2a$. F_2 est le symétrique de F_1 par rapport au centre C, milieu du grand axe.

On détermine le rapport $k_i = \dfrac{P_iF_1 + P_iF_2}{2a}$ pour les quatre positions repérées :

P_i	P_1	P_2	P_3	P_4
k_i	1,02	1,02	1,04	1,00

On a, aux erreurs de mesure près, $MF_1 + MF_2 = 2a$. D'après le doc. **D**, la trajectoire de Mercure dans le référentiel héliocentrique est elliptique.

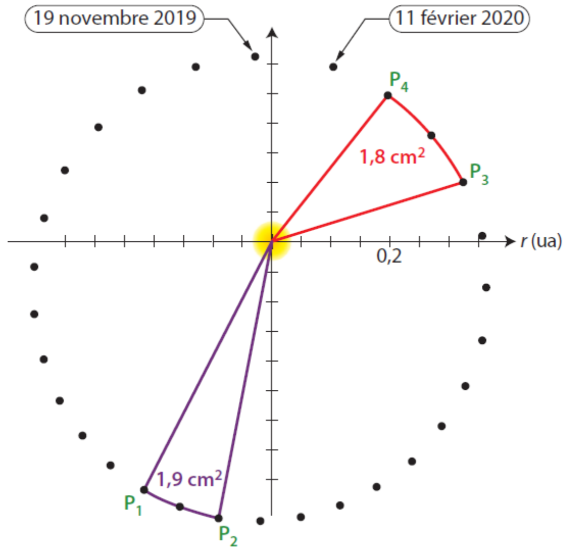
Partie II

1. et **2.** Voir la figure ci-après.
L'aire d'un secteur de l'ellipse peut en première approche se calculer comme l'aire d'un triangle dont on mesure la base et la hauteur, sachant que :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

On a $\mathcal{A}_1 = \dfrac{P_1P_2 \times SP_1}{2}$ et $\mathcal{A}_2 = \dfrac{P_3P_4 \times SP_4}{2}$.

On trouve ici $\mathcal{A}_1 = 1{,}9\ \text{cm}^2$ et $\mathcal{A}_2 = 1{,}8\ \text{cm}^2$.



3. Les aires parcourues en des durées égales (6 jours) sont égales (aux erreurs de mesure près). La deuxième loi de Kepler est donc vérifiée.

Partie III

1. La courbe représentative de la fonction $T^2 = f(r^3)$ est une droite passant par l'origine du repère d'équation : $T^2 = K \times r^3$ avec K = constante.

On a bien $\dfrac{T^2}{r^3}$ = constante. La troisième loi de Kepler est donc vérifiée.

2. Pour les objets célestes du système solaire :

$\dfrac{T^2}{r^3} = K$ avec $K = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \times \text{m}^{-3}$ (coefficient directeur).

On isole r : $r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{K}}$.

Pour Cérès, $T = 4{,}5$ ans, soit $1{,}4 \times 10^8$ s.

D'où $r = \sqrt[3]{\dfrac{\left(1{,}4 \times 10^8\ \text{s}\right)^2}{3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}}}$.

Le rayon de l'orbite de Cérès autour du Soleil est $4{,}0 \times 10^{11}$ m.